

ZADACI ZA PISMENI DEO MATURSKOG ISPITA IZ MATEMATIKE
(školska 2015/2016.godina)

I RAZRED

I.1 POLINOMI

1. Neki polinom pri deljenju sa $x - 1$ daje ostatak 2, a pri deljenju sa $x + 2$ daje ostatak -7 . Odrediti ostatak deljenja ovog polinoma sa $x^2 + x - 2$.

[Rešenje: $R(x) = 3x - 1$]

2. Odrediti parametre a i b tako da polinom $P(x) = 6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2$ bude deljiv sa $x^2 - x + b$.

[Rešenje: $a = -7, b = -1$ ili $a = -12, b = -2$]

I.2 RACIONALNI ALGEBARSKI IZRAZI

3. Uprostiti izraz: $\left(\frac{x}{y^2 + xy} - \frac{2}{x + y} + \frac{y}{x^2 + xy} \right) : \left(\frac{x}{y} - 2 + \frac{y}{x} \right)$

[Rešenje: $\frac{1}{x + y}$; $x \neq -y, x, y \neq 0$]

4. Uprostiti izraz: $\left(\frac{x^2 - xy}{x^2 y + y^3} - \frac{2x^2}{y^3 - xy^2 + x^2 y - x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{y - 1}{x} - \frac{y}{x^2} \right)$

[Rešenje: $\frac{x + 1}{xy}$; $x \neq -y, x, y \neq 0$]

5. Uprostiti izraz: $\frac{4a^2 - 1}{a^3 - a^2 - a + 1} : \left(\frac{a}{a^2 - 2a + 1} - \frac{1}{1 - a} \cdot \frac{a}{a + 1} - \frac{2}{a + 1} \right)$

[Rešenje: $\frac{2a + 1}{2}$; $|a| \neq 1$]

6. Uprostiti izraz: $\left(2a + \frac{a^2 + b^2}{b} \right) : \left(a + \frac{b^2}{a + 2b} \right) - \frac{a}{b} \left(b + 1 + \frac{2b}{a} \right)$

[Rešenje: $-a$; $a, b \neq 0$]

7. Uprostiti izraz: $\frac{2}{3a + 6} - \frac{a - 2}{2a^2 + 4a} - \frac{2}{3a^2 + 12a + 12} - \frac{4}{3a(a + 2)}$

[Rešenje: $\frac{1}{6a}$; $a \neq 0, a \neq -2$]

8. Uprostiti izraz: $\left(x + \frac{6x-12}{2x-4}\right) \cdot \frac{1}{2x^2+6x-ax-3a} + \frac{2a}{a^2-4x^2}$

[Rešenje: $\frac{1}{a+2x}$; $x \neq 2$, $x \neq 3$, $|x| \neq \frac{a}{2}$]

9. Uprostiti izraz: $\left(\frac{2x}{x^2+2xy} + \frac{4y}{x^2-4y^2} - \frac{y}{xy-2y^2}\right) : \left(1 - \frac{x^2-4y^2-2}{x^2-4y^2}\right)$

[Rešenje: $\frac{x-2y}{2}$; $x, y \neq 0$, $|x| \neq 2y$]

10. Uprostiti izraz: $\left(\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}\right) : \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}\right)\right) : \left(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$

[Rešenje: $\frac{2bc}{(b+c-a)^2}$; $b, c, a \neq 0$, $b \neq -c$]

11. Uprostiti izraz: $\left(\left(\frac{x^2}{y^3} + \frac{1}{x}\right) : \left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right)\right) : \frac{(x-y)^2 + 4xy}{1 + \frac{y}{x}}$

[Rešenje: $\frac{1}{xy}$; $x, y \neq 0$, $x \neq -y$]

12. Uprostiti izraz: $\left(\frac{z-2}{6z+(z-2)^2} + \frac{(z+4)^2-12}{z^3-8} - \frac{1}{z-2}\right) : \frac{z^3+2z^2+2z+4}{z^3-2z^2+2z-4}$

[Rešenje: $\frac{1}{z+2}$; $|z| \neq 2$]

13. Uprostiti izraz: $\left(1 + \frac{8c^3}{m^3-8c^3} + \frac{m}{2c-m}\right) \left(\frac{m+2c}{2c} - \frac{m}{m+2c}\right)$

[Rešenje: $\frac{m}{2c-m}$; $c \neq 0$, $|m| \neq 2c$]

14. Uprostiti izraz: $\left(1 - \frac{3x+y}{x-y}\right) \left(1 - \frac{2x+y}{x+2y}\right) : \left(1 + \frac{3y^2}{x^2-4y^2}\right)$

[Rešenje: $\frac{2(x-2y)}{x-y}$; $x \neq y$, $|x| \neq 2y$]

15. Uprostiti izraz: $\left(\frac{2}{m^2-m} - \frac{2m}{1-m^2}\right) \cdot \frac{2m^2+2m}{m^3-1} + \frac{4}{m-1}$

[Rešenje: $\frac{4m}{(m-1)^2}$; $m \neq 0$, $m \neq 1$]

16. Uprostiti izraz: $\left(\frac{9a^2+1}{1-6a+9a^2} - \frac{1}{27a^3-9a^2-3a+1} : \frac{1}{27a^3+1} \right) \cdot (27a^3-18a^2+3a)$

[Rešenje: $9a^2; |a| \neq \frac{1}{3}$]

17. Uprostiti izraz: $\left(\frac{2a^2+3a}{4a^2+12a+9} - \frac{3a+2}{2a+3} + \frac{4a-1}{2a+1} \right) \cdot \left(\frac{2a+3}{2a-3} \right)$

[Rešenje: $\frac{4a^2+4a-5}{(2a+1)(2a-3)}; |a| \neq \frac{3}{2}$]

18. Uprostiti izraz: $\left[\left(\frac{3}{x-y} + \frac{3x}{x^3-y^3} \cdot \frac{x^2+xy+y^2}{x+y} \right) : \frac{2x+y}{x^2+2xy+y^2} \right] \cdot \frac{3}{x+y}$

[Rešenje: $\frac{9}{x-y}; |x| \neq y$]

19. Uprostiti izraz: $\frac{3x-6}{x+2} \left(\frac{3}{x-2} + \frac{3x}{x^3-8} \cdot \frac{x^2+2x+4}{x+2} \right) : \frac{2x+2}{x^2+4x+4}$

[Rešenje: $9; x \neq 1, |x| \neq 2$]

20. Uprostiti izraz: $\left(\frac{3x+6}{2x^3+2x^2+2x+2} + \frac{2x^2-x-10}{2x^3-2x^2+2x-2} \right) : \left(\frac{5}{x^2+1} + \frac{3}{2x+2} - \frac{3}{2x-2} \right)$

[Rešenje: $\frac{x+2}{2}; |x| \neq 1, |x| \neq 2$]

21. Uprostiti izraz: $\left(\frac{x^3+2x^2-x-2}{a+1} : \frac{x^2+4x+4}{x^2-4} \right) : \frac{x^3-2x^2-x+2}{a^2+a}$

[Rešenje: $a; x \neq \pm 1, x \neq \pm 2, a \neq -1, a \neq 0$]

22. Uprostiti izraz: $\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \frac{1}{(a+2)(a+3)} + \frac{1}{(a+3)(a+4)} + \frac{1}{(a+4)(a+5)}$

[Rešenje: $\frac{5}{a(a+5)}, a \neq -5, -4, -3, -2, -1$]

23. Uprostiti izraz: $A = \left(\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}} + \frac{1}{1 + \frac{b}{a}} - \frac{1}{1 - \frac{b}{a}} \right) : \frac{1 - \frac{a-3b}{a+b}}{\frac{3a+b}{a-b} - 3}$

[Rešenje: $A = 1; a \neq 0, b \neq 0, a \neq \pm b$]

24. Izračunati vrednost izraza: $R = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}} : \frac{\frac{a-b-c}{abc}}{1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$, za $a = 0,02$; $b = -11,05$; $c = 1,07$

[Rešenje: $R = 0,1$]

25. Izračunati vrednost izraza: $\frac{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right) \cdot \left(\frac{a+b}{2a} - \frac{b}{a+b}\right)}{\left(a - 2b + \frac{b^2}{a}\right) \cdot \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b}\right)}$, za $a = 0,75$; $b = 1\frac{1}{3}$

[Rešenje: $-\frac{625}{168}$]

26. Izračunati vrednost izraza: $\frac{1 - \frac{1}{(m+x)^2}}{\left(1 - \frac{1}{m+x}\right)^2} \cdot \left(1 - \frac{1 - (m^2 + x^2)}{2mx}\right)$, ako je $x = \frac{1}{m-1}$, $m \neq 1$

[Rešenje: $\frac{m^3}{2(m-1)}$]

1.3 LINEARNE JEDNAČINE I NEJEDNAČINE

27. Data je jednačina: $\frac{3x}{a^3 - 8} - \frac{a}{a^2 + 2a + 4} = \frac{x-1}{a-2}$

- a) Rešiti po x datu jednačinu i diskutovati rešenja.
b) Odrediti parametar a , tako da rešenje jednačine bude pozitivno.

[Rešenje: a) $a \neq 2$; 1) $a = -1$, $0 \cdot x = 0$ - neodređena; 2) $a \neq -1$, $x = \frac{4}{a+1}$; b) $a \in (-1, 2) \cup (2, +\infty)$]

28. Odrediti parametar a , tako da sledeće jednačine imaju ista rešenja

$$\frac{x-a}{3} = \frac{x-3}{a} \quad \text{i} \quad \frac{x-2a}{x+3a} = 3 - \frac{2x^2 - 13a^2}{x^2 - 9a^2}$$

[Rešenje: $a = 1$; $a \neq 0$, $a \neq 3$, $x \neq \pm 3a$]

29. Rešiti jednačinu $|x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2| = x+2$

[Rešenje: $x = -2 \wedge x \geq 2$]

30. Rešiti po x nejednačinu $\frac{x}{a} + \frac{1-3x}{2} > \frac{x+2}{4a}$ i diskutovati rešenja u zavisnosti od vrednosti parametra a .

[Rešenje: 1) $a = \frac{1}{2}$, nema rešenja; 2) $0 < a < \frac{1}{2}$, $x > \frac{2(1-a)}{3(1-2a)}$; 3) $a < 0 \vee a > \frac{1}{2}$, $x < \frac{2(1-a)}{3(1-2a)}$]

31. Rešiti i diskutovati sistem jednačina: $\frac{x-a}{b} + \frac{y-b}{a} = 1 \wedge \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

[Rešenje: 1) $a-b \neq 0$ u $a+b \neq 0$, $x = \frac{a^2}{a-b}$, $y = -\frac{b^2}{a-b}$; 2) $a-b = 0$, nema reš; 3) $a+b = 0$, $(\frac{a}{b}(b-y), y)$]

32. Rešiti sistem jednačina $\frac{1}{2y+z-2} - \frac{3}{x+z-5} + \frac{1}{x+2y+2} = -1$

$$\frac{2}{2y+z-2} - \frac{5}{x+z-5} - \frac{3}{x+2y+2} = -6$$

$$\frac{5}{2y+z-2} + \frac{2}{x+z-5} - \frac{1}{x+2y+2} = 6$$

[Rešenje: $x = 1$, $y = -1$, $z = 5$]

II RAZRED

II.1 STEPENOVANJE I KORENOVANJE

1. Uprostiti izraz: $\frac{a^{-2} + b^{-2}}{a^{-1} + b^{-1}} \cdot \left(\frac{a^2 + b^2}{ab}\right)^{-1} : \frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^2 - b^2}$

[Rešenje: $-ab$; $a, b \neq 0$, $a \neq \pm b$]

2. Uprostiti izraz: $\left(\frac{x^{-1} + y^{-1}}{yx^{-1} + xy^{-1}}\right)^{-1} + \left(\frac{x^{-1} + y^{-1}}{2}\right)^{-1} - \frac{x^{-1} - y^{-1}}{x^{-1}y^{-1}}$

[Rešenje: $2x$; $xy \neq 0$, $x \neq \pm y$]

3. Uprostiti izraz: $\frac{(ab^{-1} + 1)^2}{ab^{-1} - ba^{-1}} \cdot \frac{a^3 b^{-3} - 1}{a^2 b^{-2} + ab^{-1} + 1} : \frac{a^3 b^{-3} + 1}{ab^{-1} + ba^{-1} - 1}$

[Rešenje: 1 ; $ab \neq 0$, $a \neq \pm b$]

4. Uprostiti izraz: $\frac{1 - x^{-4}}{x - x^{-1}} - \frac{2}{x^3} + \frac{x^{-4} - x^2}{x - x^{-1}}$

[Rešenje: $-\frac{2 + x^4}{x^3}$; $x \neq 0$, $x \neq \pm 1$]

5. Uprostiti izraz: $\frac{x^6 - 64}{4 + 2x^{-1} + x^{-2}} \cdot \frac{x^2}{4 - 4x^{-1} + x^{-2}} - \frac{4x^2(2x+1)}{1-2x}$

[Rešenje: $1 + 2x$; $x \neq 0$, $x \neq \frac{1}{2}$]

6. Uprostiti izraz: $\frac{a^{-1} - (b+c)^{-1}}{a^{-1} + (b+c)^{-1}} \cdot \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) : \left(\frac{abc}{a-b-c}\right)^{-1}$

[Rešenje: $\frac{(a-b-c)a}{2}$; $abc \neq 0$, $b+c \neq 0$, $a \neq b+c$, $a+b+c \neq 0$]

7. Uprostiti izraz: $\frac{a^{-2} + b^{-2}}{a^{-1} + b^{-1}} \cdot \left(\frac{a^2 + b^2}{ab}\right)^{-1} : \frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^2 - b^2}$

[Rešenje: $-\frac{ab}{(a+b)^2}$; $ab \neq 0$, $a \neq \pm b$]

8. Uprostiti izraz: $\left(\frac{2^x}{1-2^{-x}} + \frac{2^{-x}}{1+2^{-x}}\right) - \left(\frac{2^x}{2^{-x}+1} - \frac{1}{2^{-x}-1}\right)$

[Rešenje: 1]

9. Uprostiti izraz: $\sqrt[4]{x^{-1} - x^{-3}} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{1-x^{-2}}} \cdot \sqrt[4]{x - x^{-1}}$, $x > 1$

[Rešenje: x]

10. Uprostiti izraz: $\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} : \frac{1}{x^2-\sqrt{x}}$

[Rešenje: $x-1$, $x \neq 1$]

11. Uprostiti izraz: $\frac{x-1}{x+x^{1/2}+1} : \frac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1} + \frac{2}{x^{-0,5}}$

[Rešenje: $x+1$, $x \neq 1$]

12. Uprostiti izraz: $\frac{x-1}{x^{3/4}+x^{1/2}} \cdot \frac{x^{1/2}+x^{1/4}}{x^{1/2}+1} \cdot x^{1/4}+1$

[Rešenje: \sqrt{x}]

13. Uprostiti izraz: $\frac{x-y}{x^{3/4}+x^{1/2}y^{1/4}} \cdot \frac{x^{1/2}y^{1/4}+x^{1/4}y^{1/2}}{x^{1/2}+y^{1/2}} \cdot \frac{x^{1/4}y^{1/4}}{x^{1/2}-2x^{1/4}y^{1/4}+y^{1/2}}$

[Rešenje: $\frac{\sqrt[4]{y}(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}$, $x \neq y$]

14. Uprostiti izraz: $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$

[Rešenje: 1; $a, b > 0$, $a \neq b$]

15. Uprostiti izraz:
$$\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1}{x + \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{2\sqrt{xy}} \left(\frac{\sqrt{y}}{x - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{y}}{x + \sqrt{xy}} \right)$$

[Rešenje: $\frac{\sqrt{x}}{x}$, $x, y > 0$, $x \neq y$]

16. Uprostiti izraz:
$$\frac{\left(\frac{\sqrt[4]{bc^3} + \sqrt[4]{a^2bc}}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} + \sqrt[4]{bc} \right)^2}{\sqrt{bc} + 3} + bc + 3$$

[Rešenje: \sqrt{bc} , $a, b, c > 0$]

17. Uprostiti izraz:
$$\frac{(a+1)^2 - (a^2 - 1) + 2\sqrt{a^2 - 1}}{a^2 - 1 - (a-1)^2 + 2\sqrt{a^2 - 1}}$$

[Rešenje: $\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}$, $|a| > 1$]

18. Izračunati vrednost izraza:
$$\frac{\sqrt{z^2 - 1}}{\sqrt{z^2 - 1} - z}, \quad \text{za } z = \frac{1}{2} \left(\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} \right), \quad m > 0$$

[Rešenje: $\frac{m-1}{2m}$, za $0 < m \leq 1$; $\frac{1-m}{2}$, za $m > 1$]

19. Uprostiti izraz:
$$\left(\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}} + \frac{x-a}{\sqrt{x^2 - a^2} - x + a} \right) : \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}, \quad x > a > 0$$

[Rešenje: 1]

20. Uprostiti izraz:
$$\left((1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + 1-x \right) \cdot \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 1 \right), \quad -1 \leq x < 1$$

[Rešenje: $2x$]

21. Uprostiti izraz:
$$1 - \frac{\frac{1}{\sqrt{a-1}} - \sqrt{a+1}}{\frac{1}{\sqrt{a+1}} - \frac{1}{\sqrt{a-1}}} : \frac{\sqrt{a+1} \cdot \sqrt{a^2-1}}{(a-1)\sqrt{a+1} - (a+1)\sqrt{a-1}}, \quad a > 1$$

[Rešenje: $\sqrt{a^2-1}$]

II.2 KOMPLEKSNi BROJEVI

22. Izračunati $R(z)$, ako je $R(x) = (x - x^2 + 2x^3)(2 - x + x^2)$ i $z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

[Rešenje: $R(z) = 7$]

23. Izračunati:
$$z = \frac{(1+2i)^2 - (1-i)^2}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}$$

[Rešenje: $z = \frac{8}{53} + \frac{3}{106}i$]

24. Izračunati:
$$z = \frac{(1+i)^8 + (i-1)^8}{(1+i)^6 - (1-i)^6}$$

[Rešenje: $z = 2i$]

25. Izračunati:
$$z = \frac{3+i}{(1+i)(1-2i)}$$

[Rešenje: $z = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$]

26. Izračunati:
$$z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2(-1-i)} \right)^{12}$$

[Rešenje: $z = -\frac{1}{64}$]

27. Dati su kompleksni brojevi $z_1 = 3 + 2i$ i $z_2 = 2 + i$. Odrediti kompleksan broj

$z = x + yi$, ako je:
$$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{z_2}\right) = \frac{3}{5}, \quad \operatorname{Im}(z \cdot \bar{z}_1) = -1.$$

[Rešenje: $z = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i$]

28. Dati su kompleksni brojevi $z_1 = 3 + 2i$ i $z_2 = 2 + i$. Odrediti kompleksan broj

$z = x + yi$, ako je:
$$\operatorname{Im}\left(\frac{z}{z_2}\right) = \frac{3}{5}, \quad \operatorname{Re}(z \cdot \bar{z}_1) = -1.$$

[Rešenje: $z = -1 + i$]

29. Rešiti jednačinu: $(-1+i)^8 z^2 = (-1+i\sqrt{3})^{10}$

[Rešenje: $z_0 = 4 + 4i\sqrt{3}$, $z_1 = -4 - 4i\sqrt{3}$]

II.3 KVADRATNE JEDNAČINE. VIETOVE FORMULE.

KVADRATNE FUNKCIJE I NEJEDNAČINE

30. Rešiti po x jednačinu $\frac{x}{a+b} + \frac{2a-x}{a-b} - \frac{a+b}{x} = 1$, $a, b \in \mathbb{R}$ i diskutovati rešenja u zavisnosti od vrednosti parametara a i b .

[Rešenje: $a \neq \pm b, x \neq 0$; 1) $b = 0 \Rightarrow x = a$; 2) $b \neq 0, a = 3b \Rightarrow x = 4b$; 3) $b \neq 0, a \neq 3b \Rightarrow$

$$x_1 = \frac{a^2 - b^2}{2b}, \quad x_2 = a + b$$
]

31. U kvadratnoj jednačini $(5k - 1)x^2 - (5k + 2)x + 3k - 2 = 0$ odredite parametar $k \in \mathbb{R}$ tako da rešenja budu dvostruka.

$$\text{[Rešenje: } k = 2 \vee k = \frac{2}{35} \text{]}$$

32. U jednačini $x^2 - 7x + 2m - 4 = 0$ odrediti vrednost realnog parametra m za koje će jednačina imati: 1. oba rešenja pozitivna, 2. realna rešenja suprotnog znaka.

$$\text{[Rešenje: } 1. 2 < m \leq \frac{65}{8}; 2. m < 2 \text{]}$$

33. Odrediti parametar m u jednačini $x^2 - 3mx + m^2 = 0$ tako da rešenja zadovoljavaju relaciju $x_1^2 + x_2^2 = 112$.

$$\text{[Rešenje: } m_{1,2} = \pm 4 \text{]}$$

34. Ne rešavajući kvadratnu jednačinu $(m + 2)x^2 - 2(m + 1)x + m = 0$, odrediti vrednost parametra m tako da njena rešenja zadovoljavaju uslov $x_1^2 + x_2^2 = \frac{10}{9}$.

$$\text{[Rešenje: } m = 1 \vee m = -\frac{1}{2} \text{]}$$

35. Odrediti parametar m u jednačini $x^2 - x + m - 1 = 0$ tako da rešenja zadovoljavaju relaciju $x_1^3 + x_2^3 = 7$.

$$\text{[Rešenje: } m = -1 \text{]}$$

36. Ne rešavajući kvadratnu jednačinu $(m - 1)x^2 + (m + 1)x + m + 1 = 0$, odrediti vrednost parametra m tako da njena rešenja zadovoljavaju uslov $x_1^3 + x_2^3 = x_1^2 x_2^2$.

$$\text{[Rešenje: } m = 3 \vee m = -1 \text{]}$$

37. Data je jednačina $x^2 - 8x + 12 = 0$. Ne rešavajući ovu jednačinu, sastaviti kvadratnu jednačinu sa rešenjima $x_1 + \frac{1}{x_1}$ i $x_2 + \frac{1}{x_2}$.

$$\text{[Rešenje: } 12x^2 - 104x + 185 = 0 \text{]}$$

38. Data je jednačina $x^2 - 2(k + 1)x + 3k + 2 = 0$, k je realan parametar.

a) Za koju vrednost parametra k su rešenja realna?

b) Naći vezu između x_1 i x_2 nezavisnu od k .

v) Odrediti ceo broj k , tako da zbir rešenja date jednačine bude jednak zbiru njihovih kubova.

$$\text{[Rešenje: } a) k \in \left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, +\infty\right); b) 2x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) + 2 = 0; v) k = \pm 1 \text{]}$$

39. Rešiti sistem jednačina $x^2 - 3xy + y^2 = -5$ \wedge $x^2 - xy + y^2 = 7$

$$\text{[Rešenje: } (2, 3), (-2, -3), (3, 2), (-3, -2) \text{]}$$

40. Data su dva skupa parabola: $y = x^2 - (k - 3)x + k - 1$ i $y = kx^2 - 4x + k - \frac{1}{k}$. Odrediti dve parabole iz ova dva skupa, tako da one imaju minimum u istoj tački. Naći tu tačku.

$$\left[\text{Rešenje: } y = x^2 - x + 3 \text{ i } y = 4x^2 - 4x + \frac{15}{4}; \quad T\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{4}\right) \right]$$

41. Data je kvadratna funkcija $y = (k - 2)x^2 - 2kx + 2k - 3$, k je realan parametar.

- a) Za koje vrednosti parametra k je funkcija negativna za svako x ?
 b) Odrediti vrednost parametra k , tako da je zbir recipročnih vrednosti kvadrata nula funkcije jednak 2.

$$\left[\text{Rešenje: } a) k \in (-\infty, 1); \quad b) k_1 = 1, k_2 = \frac{15}{4} \right]$$

42. Za koje vrednosti parametra k je nejednakost tačna za svako x :

$$x^2 + (3k + 1)x + 5k > (k + 1)x^2 + 5kx + 7k$$

$$\left[\text{Rešenje: } x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right]$$

43. Rešiti nejednačinu: $\frac{-x^2 + 2x - 3}{x^2 - 4x + 3} < 3$

$$\left[\text{Rešenje: } x \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right) \cup (3, +\infty) \right]$$

44. Rešiti nejednačinu: $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \geq 1$

$$\left[\text{Rešenje: } x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 0] \right]$$

45. Rešiti nejednačinu: $\frac{2x^2 + x - 13}{x^2 - 2x - 3} > 1$

$$\left[\text{Rešenje: } x \in (-\infty, -5) \cup (-1, 2) \right]$$

46. Rešiti sistem nejednačina: $1 < \frac{3x^2 - 7x + 8}{x^2 + 1} < 2$

$$\left[\text{Rešenje: } x \in (1, 6) \right]$$

47. Rešiti sistem nejednačina: $0 \leq \frac{x^2 + x}{x^2 - 6x + 9} \leq \frac{1}{2}$

$$\left[\text{Rešenje: } x \in [-9, -1] \right]$$

48. Rešiti nejednačinu: $\frac{x^2 - 4|x| + 3}{x^2 - 4} < 0$

$$\left[\text{Rešenje: } x \in (-3, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, 3) \right]$$

49. Za koje vrednosti realnog parametra m rešenja x_1 i x_2 jednačine $x^2 + (2m + 2)x + m = 0$ zadovoljavaju relaciju $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} > 8$

$$[\text{Rešenje: } x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (0, 2)]$$

50. Za koje vrednosti realnog parametra m rešenja x_1 i x_2 jednačine $x^2 + (m + 3)x + m + 21 = 0$ zadovoljavaju relaciju $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} < 1$

$$[\text{Rešenje: } x \in (-\infty, -21) \cup (-9, 6)]$$

51. Rešiti nejednačinu: $\frac{x^2 - |x| - 12}{x - 3} \geq 2x$

$$[\text{Rešenje: } x \in (-\infty, 3)]$$

52. Rešiti nejednačinu: $\frac{|x - 3|}{x^2 - 5x + 6} \geq 2$

$$[\text{Rešenje: } x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right)]$$

II.4 IRACIONALNE JEDNAČINE I NEJEDNAČINE

53. Rešiti jednačinu $1 - x = \sqrt{3x^2 - 7x + 3}$

$$[\text{Rešenje: } x = \frac{1}{2}]$$

54. Rešiti jednačinu $\sqrt{2x + 3} - \sqrt{x - 1} = \sqrt{3x - 8}$

$$[\text{Rešenje: } x = \frac{7}{2}]$$

55. Rešiti jednačinu $\sqrt{4x + 5} = \sqrt{2x - 1} + \sqrt{x - 1}$

$$[\text{Rešenje: } x = 5]$$

56. Rešiti jednačinu $\sqrt{3 - x} + \frac{6}{\sqrt{3 - x}} = \sqrt{9 - 5x}$

$$[\text{Rešenje: } x = -3]$$

57. Rešiti jednačinu $\sqrt{x - 2 + \sqrt{2x - 5}} + \sqrt{x + 2 + 3\sqrt{2x - 5}} = 7\sqrt{2}$

$$[\text{Rešenje: } x = 15]$$

58. Rešiti jednačinu $\sqrt[3]{x - 1} + \sqrt[3]{x - 2} - \sqrt[3]{2x - 3} = 0$

$$[\text{Rešenje: } x = 1 \vee x = 2 \vee x = \frac{3}{2}]$$

59. Rešiti nejednačinu $\sqrt{x^2 - 5x + 4} < x - 3$

$$[\text{Rešenje: } x \in [4, 5)]$$

60. Rešiti nejednačinu $\sqrt{x^2 - x - 12} < x$

$$[\text{Rešenje: } x \in [4, +\infty)]$$

61. Rešiti nejednačinu $\sqrt{x^2 - 3x - 10} < 8 - x$

$$[\text{Rešenje: } x \in (-\infty, -2] \cup \left[5, \frac{74}{13}\right)]$$

62. Rešiti nejednačinu $\sqrt{-x^2 + x + 6} > 1 - x$

$$[\text{Rešenje: } x \in (-1, 3]]$$

63. Rešiti nejednačinu $\sqrt{x^2 - 5x - 14} > x - 5$

$$[\text{Rešenje: } x \in (-\infty, -2] \cup \left(\frac{39}{5}, +\infty\right)]$$

64. Rešiti nejednačinu $3\sqrt{-x^2 + x + 6} > 4x - 2$

$$[\text{Rešenje: } x \in [-2, 2]]$$

65. Rešiti nejednačinu $\sqrt{3x^2 - 2x - 1} \geq 2(x - 1)$

$$[\text{Rešenje: } x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup [1, 5]]$$

66. Rešiti nejednačinu $\sqrt{5x - x^2} < |2 - x|$

$$[\text{Rešenje: } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup (4, 5]]$$

II.5 EKSPONENCIJALNE JEDNAČINE I NEJEDNAČINE

67. Rešiti jednačinu $0,125 \cdot 4^{2x-8} = \left(\frac{0,25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$

$$[\text{Rešenje: } x = \frac{38}{3}]$$

68. Rešiti jednačinu $\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1} \left(\frac{9}{25}\right)^{x^2+2x-11} = \left(\frac{5}{3}\right)^9$

$$[\text{Rešenje: } x_1 = -\frac{7}{2} \vee x_2 = 2]$$

69. Rešiti jednačinu $9^{|3x-1|} = 3^{8x-2}$

$$[\text{Rešenje: } x = \frac{2}{7}]$$

70. Rešiti jednačinu $\left((\sqrt[5]{27})^{x/4 - \sqrt{x/3}} \right)^{x/4 + \sqrt{x/3}} = \sqrt[4]{3^7}$

$$[\text{Rešenje: } x = 10]$$

71. Rešiti jednačinu $\sqrt{2^x \cdot \sqrt[3]{4^x \cdot \sqrt[4]{0,125}}} = 4\sqrt[3]{2}$

$$[\text{Rešenje: } x = 3 \left(x \neq -\frac{1}{5}; -\frac{1}{5} \notin N \right)]$$

72. Rešiti jednačinu $5^{2x-3} = 2 \cdot 5^{x-2} + 3$

$$[\text{Rešenje: } x = 2]$$

73. Rešiti jednačinu $4^{x - \sqrt{x^2-5}} - 12 \cdot 2^{x-1 - \sqrt{x^2-5}} + 8 = 0$

$$[\text{Rešenje: } x = 3 \vee x = \frac{9}{4}]$$

74. Rešiti jednačinu $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$

$$[\text{Rešenje: } x = 2]$$

75. Rešiti jednačinu $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$

$$[\text{Rešenje: } x = 11 \vee x = 3]$$

76. Rešiti jednačinu $2^{x + \sqrt{x^2-4}} - 5 \cdot (\sqrt{2})^{x-2 + \sqrt{x^2-4}} - 6 = 0$

$$[\text{Rešenje: } x = \frac{5}{2}]$$

77. Rešiti jednačinu $4^{x + \sqrt{x^2-2}} - 3 \cdot 2^{x-1 + \sqrt{x^2-2}} = 10$

$$[\text{Rešenje: } x = \frac{3}{2}]$$

78. Rešiti jednačinu $\sqrt[4]{64} - 5\sqrt[4]{2^{x+3}} + 16 = 0$

$$[\text{Rešenje: } x = 1 \vee x = 3]$$

79. Rešiti jednačinu $64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x = 0$

$$[\text{Rešenje: } x = 1 \vee x = 2]$$

80. Rešiti jednačinu $12 \cdot 9^x - 35 \cdot 6^x + 18 \cdot 4^x = 0$

[Rešenje: $x = -1 \vee x = 2$]

81. Rešiti jednačinu $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$

[Rešenje: $x = 0 \vee x = \frac{1}{2}$]

82. Rešiti jednačinu $3^{2x-3} - 9^{x-1} + 27^{2x/3} = 675$

[Rešenje: $x = 3$]

83. Rešiti jednačinu $5^{2x} - 7^x - 5^{2x} \cdot 35 + 7^x \cdot 35 = 0$

[Rešenje: $x = 0$]

84. Rešiti jednačinu $4^x - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$

[Rešenje: $x = \frac{3}{2}$]

85. Rešiti jednačinu $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$

[Rešenje: $x = -1$]

86. Rešiti jednačinu $4^{2x+2} - 3^{2x+\frac{3}{2}} = 3^{2x+\frac{5}{2}} - 2^{4x+3}$

[Rešenje: $x = -\frac{1}{4}$]

87. Rešiti jednačinu $5^{\frac{2x+4}{5}} - 4^{\frac{2x-3}{3}} = 5^{\frac{2x-1}{5}} + 4^{\frac{2x}{3}}$

[Rešenje: $x = 3$]

88. Rešiti nejednačinu $(1,25)^{1-x} < (0,64)^{2(1+\sqrt{x})}$

[Rešenje: $x \in (25, +\infty)$]

89. Rešiti nejednačinu $\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{x^2-2x}{x^2}} \geq 1$

[Rešenje: $x \in (0, 2]$]

90. Rešiti nejednačinu $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{|x+2|}{1-|x|}} > 9$

[Rešenje: $x \in \left(-\frac{4}{3}, -1\right) \cup (1, 4)$]

91. Rešiti nejednačinu $\left(\frac{1}{2}\right)^{2\sqrt{x}} + 2 > 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}}$

[Rešenje: $x \in (0, +\infty)$]

92. Rešiti nejednačinu $\frac{1}{2^{2x} + 3} \geq \frac{1}{2^{x+2} - 1}$

[Rešenje: $x \in (-\infty, -2) \cup \{1\}$]

II.6 LOGARITMOVANJE. LOGARITAMSKE JEDNAČINE I NEJEDNAČINE

93. Izračunati $\log_3 5$, ako je $\log_6 2 = a$ i $\log_6 5 = b$.

[Rešenje: $\log_3 5 = \frac{b}{1-a}$]

94. Izračunati $\log_{35} 28$, ako je $\log_{14} 7 = a$ i $\log_{14} 5 = b$.

[Rešenje: $\log_{35} 28 = \frac{2-a}{a+b}$]

95. Izračunati $\log_{ab} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$, ako je $\log_{ab} a = t$ ($a, b > 0, ab \neq 1$).

[Rešenje: $\log_{ab} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}} = \frac{5t-3}{6}$]

96. Izračunati $\log_c x$, ako je $\log_a x = p$, $\log_b x = q$ i $\log_{abc} x = r$.

[Rešenje: $\log_c x = \frac{pqr}{pq - pr - qr}$]

97. Rešiti jednačinu $\log_4 (x+2) \cdot \log_x 2 = 1$

[Rešenje: $x = 2$]

98. Rešiti jednačinu $\log_{\sqrt{2}} x + \log_2 x + \log_{\sqrt{8}} x = 11$

[Rešenje: $x = 8$]

99. Rešiti jednačinu $\log_2 x - 2 \log_8 x + \log_{\sqrt{2}} 2x = \frac{20}{3}$

[Rešenje: $x = 4$]

100. Rešiti jednačinu $\log_{0,5x} x^2 - 14 \cdot \log_{16x} x^3 + 40 \cdot \log_{4x} \sqrt{x} = 0$

[Rešenje: $x = 4 \vee x = \frac{\sqrt{2}}{2}$]

101. Rešiti jednačinu $\log_7 (2^x - 1) + \log_7 (2^x - 7) = 1$

[Rešenje: $x = 3$]

102. Rešiti jednačinu $\log \sqrt{x-8} + \frac{1}{2} \log(2x+1) = 1$

[Rešenje: $x = 12$]

103. Rešiti jednačinu $\log 2 + \log(4^{x-2} + 9) = 1 + \log(2^{x-2} + 1)$

[Rešenje: $x = 2 \vee x = 4$]

104. Rešiti jednačinu $2 \log_2 \frac{x-7}{x-1} + \log_2 \frac{x-1}{x+1} = 1$

[Rešenje: $x = -17$]

105. Rešiti jednačinu $\log \sqrt{x-5} + \log \sqrt{2x-3} + 1 = \log 30$

[Rešenje: $x = 6$]

106. Rešiti jednačinu $\frac{\log(\sqrt{x+1}+1)}{\log \sqrt[3]{x-40}} = 3$

[Rešenje: $x = 48$]

107. Rešiti jednačinu $\log_7 2 + \log_{49} x = \log_{1/7} \sqrt{3}$

[Rešenje: $x = \frac{1}{12}$]

108. Rešiti jednačinu $\log_5 x + \log_{25} x = \log_{1/5} \sqrt{3}$

[Rešenje: $x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$]

109. Rešiti jednačinu $\log_5(x-2) + \log_{\sqrt{5}}(x^3-2) + \log_{0,2}(x-2) = 4$

[Rešenje: $x = 3$]

110. Rešiti jednačinu $\log_{1/2}^2(4x) + \log_2 \frac{x^2}{8} = 8$

[Rešenje: $x = 2^{-7} \vee x = 2$]

111. Rešiti jednačinu $4^{\log_5 x^2} - 4^{1+\log_5 x} + 4^{-1+\log_5 x} = 1$

[Rešenje: $x = 5$]

112. Rešiti jednačinu $x^{1+\log x} = 10x$

[Rešenje: $x = \frac{1}{10} \vee x = 10$]

113. Rešiti jednačinu $(x+1)^{\log(x+1)} = 100(x+1)$

[Rešenje: $x = -0.9 \vee x = 99$]

114. Rešiti jednačinu $x^{\frac{\log x+5}{3}} = 10^{5+\log x}$

[Rešenje: $x = 10^{-5} \vee x = 10^3$]

115. Rešiti jednačinu $(\sqrt{x})^{\log_5 x - 1} = 5$

[Rešenje: $x = \frac{1}{5} \vee x = 25$]

116. Rešiti jednačinu $x^{\frac{\log x+7}{4}} = 10^{\log x+1}$

[Rešenje: $x = 10^4 \vee x = 10$]

117. Rešiti jednačinu $3^{\log_x 3} \cdot x^{\log_3 x} = 9$

[Rešenje: $x = 3 \vee x = 3^{\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}}$]

118. Rešiti jednačinu $x^{\log_x 2(x^2-1)} = 5$

[Rešenje: $x = \sqrt{26}$, uslov: $x > 1$]

119. Rešiti nejednačinu $\frac{1 - \log_4 x}{1 + \log_2 x} \leq \frac{1}{2}, \quad x > 0$

[Rešenje: $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup [\sqrt{2}, +\infty)$]

120. Rešiti nejednačinu $\log_{x-3}(x^2 - 4x + 3) < 0$

[Rešenje: $x \in (2 + \sqrt{2}, 4)$]

II.7 TRIGONOMETRIJA

121. Dokazati da je $2 \cdot \left(\cos^2 \alpha + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha \right) \right) = 3$.

122. Ako je $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ i $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, pri čemu je $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ i $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, dokazati da je $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$.

123. Ako je $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, dokazati da je $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$.

124. Dokazati da je $2 \cdot (\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) - 3 \cdot (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) + 1 = 0$.

125. Dokazati da je $\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ = \cos 7^\circ$, ako znamo da je $\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$.

126. Dokazati da je $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$, za $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

127. Dokazati da je $\frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1} = 2 \cos \alpha$.

II.8 TRIGONOMETRIJSKE JEDNAČINE I NEJEDNAČINE

128. Rešiti jednačinu: $2 \sin^4 x - 2 \cos^4 x - 1 = 0$ na intervalu $[-\pi, \pi]$.

[**Rešenje:** $x_1 = -\frac{2\pi}{3}$, $x_2 = -\frac{\pi}{3}$, $x_3 = \frac{\pi}{3}$, $x_4 = \frac{2\pi}{3}$]

129. Rešiti jednačinu: $1 - 2 \sin \frac{x}{6} = \cos \frac{x}{3}$

[**Rešenje:** $x_1 = 6k\pi \vee x_2 = 3\pi + 12n\pi$, $k, n \in \mathbb{Z}$]

130. Rešiti jednačinu: $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \sin \frac{x}{2}$

[**Rešenje:** $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$]

131. Rešiti jednačinu: $2 \sin^2 x + 4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos 2x = \sqrt{3} + 1$

[**Rešenje:** $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$, $k, n \in \mathbb{Z}$]

132. Rešiti jednačinu: $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = 2\sqrt{3} \sin \frac{x}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right)$

[**Rešenje:** $x_1 = k\pi \vee x_2 = \pm \frac{\pi}{6} + 2n\pi$, $k, n \in \mathbb{Z}$]

133. Rešiti jednačinu: $\sin 3x + \cos 2x = 1$

[**Rešenje:** $x_1 = k\pi$, $x_2 = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{13}-1}{4} + m\pi$, $k, m \in \mathbb{Z}$]

134. Rešiti jednačinu: $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{2} \sin x \cos x$

[**Rešenje:** $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$]

135. Rešiti jednačinu: $2 \sin^2 x + \cos^2 x = \frac{3}{2} \sin 2x$

[**Rešenje:** $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x_2 = \arctg \frac{1}{2} + n\pi$, $k, n \in \mathbb{Z}$]

136. Rešiti jednačinu: $\cos 2x - 3 \cos x = 4 \cos^2 \frac{x}{2}$

$$\text{[Rešenje: } x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \text{]}$$

137. Rešiti jednačinu: $3 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x = 2$

$$\text{[Rešenje: } x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \vee \quad x_2 = \arctg 3 + n\pi, \quad k, n \in \mathbb{Z} \text{]}$$

138. Rešiti jednačinu: $\cos^2 x + 3 \sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x = 1$

$$\text{[Rešenje: } x_1 = k\pi \quad \vee \quad x_2 = -\frac{\pi}{3} + n\pi, \quad k, n \in \mathbb{Z} \text{]}$$

139. Rešiti jednačinu: $\sin x + \sqrt{3} \cos x = -\sqrt{2}$

$$\text{[Rešenje: } x_1 = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi \quad \vee \quad x_2 = \frac{11\pi}{12} + 2n\pi, \quad k, n \in \mathbb{Z} \text{]}$$

140. Rešiti jednačinu: $\sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x = 1$

$$\text{[Rešenje: } x_1 = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \quad \vee \quad x_2 = \frac{\pi}{12} + (2n+1)\pi, \quad k, n \in \mathbb{Z} \text{]}$$

141. Rešiti jednačinu: $\sin^2 x (\operatorname{tg} x + 1) = 3 \sin x (\cos x - \sin x) + 3$

$$\text{[Rešenje: } x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad x_2 = \frac{\pi}{3} + m\pi, \quad x_3 = -\frac{\pi}{3} + n\pi, \quad k, m, n \in \mathbb{Z} \text{]}$$

142. Rešiti jednačinu: $(\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x)^2 - 5 = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$

$$\text{[Rešenje: } x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \text{]}$$

143. Rešiti jednačinu: $32 \cos^6 x - \cos 6x = 1$

$$\text{[Rešenje: } x_1 = \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi, \quad x_2 = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad k, n \in \mathbb{Z} \text{]}$$

144. Rešiti jednačinu: $\frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{5}{2} + \cos 4x$

$$\text{[Rešenje: } x_1 = -\frac{\pi}{6} + k\pi \quad \vee \quad x_2 = \frac{\pi}{6} + n\pi, \quad k, n \in \mathbb{Z} \text{]}$$

145. Rešiti jednačinu: $\frac{1}{2} \sin 4x \sin x + \sin 2x \sin x = 2 \cos^2 x$

$$\text{[Rešenje: } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \text{]}$$

146. Rešiti nejednačinu: $\log_2 (\cos 2x + 3 \sin x + 1) < 1$

$$\left[\text{Rešenje: } x \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, 2k\pi \right) \vee x \in \left(\pi + 2n\pi, \frac{7\pi}{6} + 2n\pi \right), \quad k, n \in \mathbb{Z} \right]$$

III RAZRED

III.1 POLIEDRI I OBRITNA TELA

1. Osnova pravog paralelepipeda je paralelogram sa stranicama a i b i ostrim uglom α . Ako je manja dijagonala paralelepipeda jednaka većoj dijagonali osnove, izračunati zapreminu paralelepipeda.

$$\left[\text{Rešenje: } V = 2ab \cdot \sin \alpha \sqrt{ab \cdot \cos \alpha} \right]$$

2. Основа четворострани пирамиде је ромб чији је оштар угао α , а краћа дијагонала d . Израчунати површину пирамиде ако све бочне стране те пирамиде заклапају исти угао β са основом.

$$\left[\text{Rešenje: } P = \frac{1}{2} d^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \left(1 + \frac{1}{\cos \beta} \right) \right]$$

3. Osnovna ivica pravilne trostrane piramide jednaka je a , a bočna strana nagnuta je prema ravni osnove pod uglom φ . Naći površinu i zapreminu te piramide.

$$\left[\text{Rešenje: } P = \frac{a^2 \sqrt{3} (\cos \varphi + 1)}{4}; \quad V = \frac{a^3 \operatorname{tg} \varphi}{24} \right]$$

4. U pravilnu trostranu piramidu upisana je pravilna trostrana prizma čija je gornja osnova paralelni presek piramide, a donja osnova pripada osnovi piramide. Osnovna ivica piramide je 12cm , a visina je 15cm . Površina omotača prizme je 120cm^2 . Odrediti odnos zapremina prizme i piramide.

$$\left[\text{Rešenje: } I \text{ Rešenje: } V_1 : V_2 = 2 : 9; \quad II \text{ Rešenje: } V_1 : V_2 = 4 : 9 \right]$$

5. Nagib bočne strane pravilne trostrane zarubčene piramide prema ravni osnove iznosi 60° . Ivica te osnove je a i površina piramide P . Izračunati osnovnu ivicu druge osnove.

$$\left[\text{Rešenje: } b = \sqrt{3a^2 - \frac{4P}{\sqrt{3}}} \right]$$

6. Odrediti zapreminu pravilne četverostrane zarubčene piramide ako je veća osnovna ivica a , manja osnovna ivica b , a oštar ugaо bočne strane 60° .

$$\left[\text{Rešenje: } V = \frac{\sqrt{2}(a^3 - b^3)}{6} \right]$$

7. U pravu kupu poluprečnika r i visine $H = r\sqrt{2}$ upisana je kocka, tako da joj jedna strana leži u osnovi kupe, a ostala četiri temena pripadaju omotaču kupe. Odrediti razmeru zapremina kupe i kocke.

$$\left[\text{Rešenje: } V_1 : V_2 = 4\pi : 3 \right]$$

8. Dat je pravougli trapez sa osnovicama 10cm i 6cm i oštirim uglom od 60° . Izračunati zapreminu i površinu tela koje nastaje rotiranjem datog trapeza oko dužeg kraka.

$$\text{[Rešenje: } P = \pi(68\sqrt{3} + 96)\text{cm}^2; \quad V = 392\pi\text{ cm}^3 \text{]}$$

9. Pravougli trapez osnovica $a = 9\text{cm}$ i $b = 4\text{cm}$ i sa dužim krakom 13cm rotira oko ose paralelne visini, koja je u ravni trapeza i ne seče ga. Rastojanje ose je 1cm od temena pravog ugla trapeza. Izračunati površinu i zapreminu nastalog tela.

$$\text{[Rešenje: } P = 342\pi\text{ cm}^2; \quad V = 688\pi\text{ cm}^3 \text{]}$$

10. Jednakokraki trapez čije su osnovice 20cm i 8cm i krak 10cm rotira oko ose koja pripada njegovoj ravni, a ne seče ga. Osa je paralelna većoj osnovici trapeza i na rastojanju je $2,5\text{cm}$ od nje. Izračunati površinu i zapreminu nastalog tela.

$$\text{[Rešenje: } P = 528\pi\text{ cm}^2; \quad V = 1328\pi\text{ cm}^3 \text{]}$$

11. Jednakostranični trougao stranice a rotira oko prave koja sadrži jedno njegovo teme i paralelna je naspramnoj stranici trougla. Izračunati površinu i zapreminu dobijenog obrtnog tela.

$$\text{[Rešenje: } P = 2a^2\sqrt{3}\pi; \quad V = \frac{\pi a^3}{2} \text{]}$$

12. Jednakostranični trougao ABC stranice a rotira oko prave koja sadrži teme A i paralelna je visini koja sadrži teme B . Izračunati površinu i zapreminu dobijenog rotacionog tela.

$$\text{[Rešenje: } P = 3\pi a^2; \quad V = \frac{1}{4}\pi a^3\sqrt{3} \text{]}$$

13. Romb sa dijagonalama 4dm i 3dm rotira oko visine koja prolazi kroz središte romba. Naći zapreminu tako dobijenog tela.

$$\text{[Rešenje: } V = 4898\pi\text{ cm}^3 \text{]}$$

14. U sferu čija je površina $P = 100\pi\text{ cm}^2$ upisan je vaqak čiji osni presek ima površinu 48cm^2 . Naći površinu i zapreminu vaqka.

$$\text{[Rešenje: } P_1 = 66\pi\text{ cm}^2, \quad V_1 = 72\pi\text{ cm}^3; \quad P_2 = 80\pi\text{ cm}^2, \quad V_2 = 96\pi\text{ cm}^3 \text{]}$$

15. U sferi poluprečnika R upisan je pravilan tetraedar. Odrediti zapreminu tetraedra.

$$\text{[Rešenje: } V = \frac{8}{27}R^3\sqrt{3} \text{]}$$

16. Naći poluprečnik upisane i opisane lopte oko tetraedra stranice a .

$$\text{[Rešenje: } r = \frac{a\sqrt{6}}{12}; \quad R = \frac{a\sqrt{6}}{4} \text{]}$$

17. Oko lopte zapremine $36\pi\text{ cm}^3$ opisana je prava zarubqena kupa, koja ima poluprečnik jedne baze jednak 4cm . Izračunati površinu i zapreminu te kupe.

$$[\text{Rešenje: } P = \frac{481\pi}{8} \text{ cm}^2, V = \frac{481\pi}{8} \text{ cm}^3]$$

18. У лопти полупречника $R = 8\text{ cm}$ уписана је купа, чија је висина једнака пречнику основе. Израчунати површину и запремину купе.

$$[\text{Rešenje: } P = \frac{1024\pi}{25}(1 + \sqrt{5}) \text{ cm}^2, V = \frac{65536\pi}{375} \text{ cm}^3]$$

19. Data je lopta poluprečnika R . Oko lopte opisan je vaqak i jednakostranična купа. Odrediti u kom odnosu su zapremine ovih tela.

$$[\text{Rešenje: } V_L : V_V : V_K = 4 : 6 : 9]$$

20. Nad krugom poluprečnika 5 cm postavqeni su na istoj strani uspravni vaqak i uspravna купа. Ta dva tela imaju jednake površine i jednake zapremine. Izračunati zapreminu onog dela kupe koji pripada vaqku.

$$[\text{Rešenje: } V = \frac{1900\pi}{27} \text{ cm}^3]$$

III.2 DETERMINANTE

21. Rešiti jednačinu:
$$\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$[\text{Rešenje: } x_1 = 3 \vee x_2 = 2]$$

22. Rešiti jednačinu:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & -1 \\ x & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$[\text{Rešenje: } x_1 = -3 \vee x_2 = 3]$$

23. Rešiti jednačinu:
$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & -1 \\ -1 & x+2 & 1 \\ -1 & x & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$[\text{Rešenje: } x_1 = 0 \vee x_2 = 1]$$

24. Rešiti jednačinu:
$$\begin{vmatrix} 4 & 8 & x+3 \\ x+2 & 6 & 3 \\ 1 & 2x & x \end{vmatrix} = 0$$

$$[\text{Rešenje: } x_1 = -1 \vee x_2 = -3]$$

25. Rešiti jednačinu:
$$\begin{vmatrix} -2 & 8 & x+3 \\ 1 & 6 & 3 \\ -1 & 2x & x \end{vmatrix} = 0$$

$$[\text{Rešenje: } x_1 = 1 \vee x_2 = -3]$$

26. Rešiti jednačinu:
$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & x+3 \\ x+2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$[\text{Rešenje: } x_1 = 1 \vee x_2 = -3]$$

27. Rešiti jednačinu:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = 0$$

[Rešenje: $x_1 = 1 \vee x_2 = 2$]

28. Rešiti sistem jednačina:

$$\frac{y+z}{5} - \frac{6z+x}{2} = 2 \quad \wedge \quad \frac{y-2x}{3} + \frac{6z+5x}{4} = 0 \quad \wedge \quad \frac{y+6}{7} - \frac{x-2}{21} = \frac{2-z}{3}$$

[Rešenje: $(x, y, z) = (2, 1, -1)$]

29. U zavisnosti od realnog parametra m diskutovati rešenja sistema:

$$(m+1)x + y + z = 0 \quad \wedge \quad x + (m+1)y + z = 0 \quad \wedge \quad x + y + (m+1)z = 0$$

[Rešenje: $D = m^2(m+3)$; 1) $m \neq 0, m \neq -3 \Rightarrow x = y = z = 0$; 2) $m = 0 \Rightarrow (x, y, z) = (-y - z, y, z)$;

3) $m = -3 \Rightarrow (x, y, z) = (z, z, z)$]

30. U zavisnosti od realnog parametra m diskutovati rešenja sistema:

$$4x + 8y + (m+3)z = -2 \quad \wedge \quad (m+2)x + 6y + 3z = 1 \quad \wedge \quad x + 2my + mz = -1$$

[Rešenje: 1) $m \neq 1, m \neq -3 \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{1}{m-1}, \frac{1}{2(m-1)}, \frac{2}{1-m}\right)$; 2) $m = 1 \Rightarrow$ sistem nema rešenja; 3) $m = -3 \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{1-4t}{2}, t, \frac{1-16t}{2}\right), t \in \mathbb{R}$]

31. U zavisnosti od realnog parametra m diskutovati rešenja sistema:

$$x + (m+2)y - z = 0 \quad \wedge \quad (m+2)x + y - z = 1 \quad \wedge \quad x + y - (m+2)z = m+3$$

[Rešenje: 1) $m \neq -1, m \neq -4 \Rightarrow (x, y, z) = \left(0, -\frac{1}{m+1}, \frac{m+2}{m+1}\right)$; 2) $m = -1 \Rightarrow$ sistem nema rešenja; 3) $m = -4 \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{3t-1}{3}, t, -\frac{3t+1}{3}\right), t \in \mathbb{R}$]

32. U zavisnosti od realnog parametra m diskutovati rešenja sistema:

$$x - y - mz = 1 \quad \wedge \quad mx + 3y + 3z = -1 \quad \wedge \quad mx + y + mz = 1 - m$$

[Rešenje: 1) $m \neq \pm 1 \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{2-m}{m+1}, \frac{m^2-2m+3}{3(m+1)}, -\frac{m+4}{3(m+1)}\right)$; 2) $m = -1 \Rightarrow$ sistem nema rešenja; 3) $m = 1 \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} - t, t\right), t \in \mathbb{R}$]

33. U zavisnosti od realnog parametra a diskutovati rešenja sistema:

$$ax + y + z = 1 \quad \wedge \quad x + ay + z = 2 \quad \wedge \quad x + y + az = -3$$

[Rešenje: 1) $a \neq 1, a \neq -2 \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{1}{a-1}, \frac{2}{a-1}, \frac{-3}{a-1}\right)$; 2) $a = 1 \Rightarrow$ sistem nema rešenja; 3) $a = -2 \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{3t-4}{3}, \frac{3t-5}{3}, t\right), t \in \mathbb{R}$]

III.3 VEKTORI

34. Vektori $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ i $\vec{b} = 5\vec{m} - 4\vec{n}$ su stranice pravougaonika, pri čemu je $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$. Izračunati

$\angle(\vec{m}, \vec{n})$, dužinu dijagonale pravougaonika i ugao φ između dijagonala.

$$[\text{Rešenje: } \angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}; \varphi = \frac{2\pi}{3} \vee \frac{\pi}{3}; |\vec{d}| = 2\sqrt{7}]$$

35. Date su koordinate temena trougla ABC ($A(-1, 3, 1)$, $B(3, 4, -2)$, $C(5, 2, -1)$). Odrediti $\angle ABC$.

$$[\text{Rešenje: } \angle ABC = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)]$$

36. Izračunati površinu trougla određenog vektorima $2\vec{a} - 3\vec{b}$ i $3\vec{a} + 2\vec{b}$, ako je $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 4$.

$$[\text{Rešenje: } P = \frac{39\sqrt{15}}{4}]$$

37. Izračunati površinu trougla ako su date koordinate njegovih temena:

$$A(2, -3, 4), B(1, 2, -1), C(3, -2, 1)$$

$$[\text{Rešenje: } P_{\triangle ABC} = 5\sqrt{2}]$$

38. Odrediti ugao između vektora $\vec{a} + \vec{b}$ i $2\vec{a} - \vec{b}$ i zapreminu paralelepipeda konstruisanog nad vektorima $\vec{a} + \vec{b}$, $2\vec{a} - \vec{b}$ i \vec{c} , ako je $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{4}{5}$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \frac{1}{3}$.

$$[\text{Rešenje: } \varphi = \frac{\pi}{4}; V = 1]$$

39. Zadati su vektori $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (2, 2, 1)$ i $\vec{c} = (1, 3, -6)$. Odrediti vektor \vec{d} , normalan na \vec{a} i \vec{b} , tako da je $\vec{c} \cdot \vec{d} = 16$. Zatim izračunati zapreminu paralelepipeda određenog vektorima \vec{a} , \vec{b} i \vec{d} i visinu koja odgovara strani (\vec{a}, \vec{d}) .

$$[\text{Rešenje: } \vec{d} = (-8, 8, 0); V = 16; h = \frac{\sqrt{6}}{3}]$$

40. Dati su vektori $\vec{a} = (-1, 2, 1)$, $\vec{b} = (2, 1, 3)$ i $\vec{c} = (0, 1, 0)$.

a) Napisati vektor \vec{c} kao linearnu kombinaciju vektora \vec{a} i $\vec{a} \times \vec{b}$

b) Naći t tako da vektor $\vec{d} = (1, t, 2)$ bude komplanaran sa vektorima $\vec{a} \times \vec{b}$ i $\vec{a} \times \vec{c}$.

$$[\text{Rešenje: } a) \vec{c} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{15}(\vec{a} \times \vec{b}); b) t = -\frac{1}{2}]$$

41. Tačke $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, 6)$, $D(2, 3, 8)$ su temena piramide. Izračunati zapreminu piramide i visinu koja odgovara osnovi ABC .

$$[\text{Rešenje: } V = 14; H = \sqrt{14}]$$

III.4 PRAVA U RAVNI

42. Temena na osnovici jednakokrakog trougla su $A(-2, 2)$ i $B(4, 8)$, a dužina kraka trougla iznosi $5\sqrt{2}$. Naći koordinate trećeg temena i površinu trougla.

[Rešenje: $C_1(-3, 9)$, $C_2(5, 1)$; $P = 24$]

43. Jedno teme trougla je $A(3, -4)$, a dve visine pripadaju pravama $h_c: 7x - 2y - 1 = 0$ i $h_b: 2x - 7y - 6 = 0$. Odrediti jednačine njegovih stranica.

[Rešenje: $AB: 2x + 7y + 22 = 0$, $AC: 7x + 2y - 13 = 0$, $BC: x - y + 2 = 0$]

44. Naći jednačinu prave p , koja sadrži presečnu tačku pravih $a: 9x - 4y - 19 = 0$ i $b: 9x + 16y + 1 = 0$, a paralelna je sa pravom $q: 4x - 5y + 20 = 0$.

[Rešenje: $12x - 15y - 35 = 0$]

III.5 K R U G

45. Naći jednačinu kružnice koja sadrži presek kružnica $k_1: x^2 + y^2 - 10x - 6y + 17 = 0$ i $k_2: x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$, i datu tačku $A(10, -1)$.

[Rešenje: $k: (x - 7)^2 + (y - 5)^2 = 45$]

46. Za koji ugao treba da rotira prava $p: x - 7y + 59 = 0$ oko svoje tačke $M(-3, y)$ da bi postala tangenta kružnice $k: x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$.

[Rešenje: $\alpha = 45^\circ \vee \alpha = 135^\circ$]

47. Iz tačke $P(-3, 6)$ konstruisane su tangente na kružnicu $k: x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0$. Napisati njihove jednačine.

[Rešenje: $4x - 3y + 30 = 0 \wedge 3x + 4y - 15 = 0$]

48. Iz tačke $P(0, 8)$ konstruisane su tangente na kružnicu $k: x^2 + y^2 - 6x + 4 = 0$. Napisati njihove jednačine.

[Rešenje: $2x - y + 8 = 0 \wedge 2x + y - 8 = 0$]

49. Naći ugao pod kojim prava $p: 3x + 4y - 13 = 0$ seče kružnicu $k: x^2 + y^2 + 9x - 7y + 20 = 0$.

[Rešenje: $\alpha = 45^\circ$]

50. Naći ugao pod kojim prava $p: x - 3y - 5 = 0$ seče kružnicu $k: x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$.

[Rešenje: $\alpha = 45^\circ$]

51. Naći ugao između prave $p: 3x - y = 1$ i kružnice $k: x^2 + y^2 + 4x - 6y - 7 = 0$.

[Rešenje: $\alpha = 45^\circ$]

52. Naći ugao pod kojim se seku kružnice $k_1: x^2 + y^2 + 8x - 9 = 0$ i $k_2: x^2 + y^2 + 9x - 7y + 20 = 0$.

[Rešenje: $\alpha = 45^\circ$]

III.6 E L I P S A

53. Napisati jednačine tangenti elipse $2x^2 + 3y^2 = 35$ koje su normalne na pravu $3x - 8y - 24 = 0$.

[Rešenje: $8x + 3y \pm 35 = 0$]

54. Napisati jednačine tangenti elipse $x^2 + 2y^2 = 54$ koje su normalne na pravu $x + y - 4 = 0$.

[Rešenje: $x - y \pm 9 = 0$]

55. Napisati jednačinu one tangente elipse $x^2 + 3y^2 = 28$ koja sa pravom $x - 5y - 20 = 0$ gradi ugao od 45° .

[Rešenje: $y = -\frac{2}{3}x \pm \frac{14}{3}$]

56. Iz tačke $A(2, 7)$ konstruisane su tangente na elipsu $x^2 + 4y^2 = 100$. Naći jednačine tih tangenti i površinu trougla ograničenog tangentama i dodirnom tetivom.

[Rešenje: $P = 25$]

57. U elipsu $x^2 + 4y^2 = 36$ je upisan kvadrat. Naći njegovu površinu.

[Rešenje: $P = \frac{144}{5}$]

58. Odrediti uglove pod kojima se seku prava $p: x + y - 2 = 0$ i elipsa $x^2 + 3y^2 = 12$.

[Rešenje: $\alpha = 45^\circ, \beta = 90^\circ$]

III.7 H I P E R B O L A

59. Napisati jednačine tangenti hiperbole $9x^2 - 4y^2 = 32$ koje su paralelne sa pravom $9x + 2y - 1 = 0$.

[Rešenje: $9x + 2y \pm 16 = 0$]

60. Napisati jednačine tangenti hiperbole $5x^2 - 7y^2 = 13$ koje su normalne na pravu $7x + 10y + 28 = 0$.

[Rešenje: $9x + 2y \pm 16 = 0$]

61. Iz tačke $A(1, -10)$ konstruisane su tangente na hiperbolu $4x^2 - y^2 = 32$. Naći jednačinu tetive koja spaja tačke dodira tih tangenti i hiperbole.

[Rešenje: $2x + 5y - 16 = 0$]

62. Odrediti ugao pod kojim se seku krive $e: 3x^2 + 4y^2 = 84$ i $h: 3x^2 - 4y^2 = 12$ i jednačine tangenti u jednoj presečnoj tački.

[**Rešenje:** $\alpha = 90^\circ$, presečne tačke: $(4, 3)$, $(4, -3)$, $(-4, 3)$, $(-4, -3)$;

tangente u $(-4, 3)$: $x + y + 1 = 0$, $x - y + 7 = 0$]

63. Na tangenti elipse $4x^2 + 5y^2 = 20$, koja je konstruisana u tački $M\left(-\frac{5}{3}, y > 0\right)$ elipse, leži tetiva hiperbole $4x^2 - y^2 = 36$. Naći dužinu te tetive.

[**Rešenje:** $|AB| = 8\sqrt{2}$]

III.8 PARABOLA

64. Naći jednačinu tetive parabole $y^2 = 4x$, koja je tačkom $P\left(\frac{5}{2}, -1\right)$ prepolovljena.

[**Rešenje:** $2x + y - 4 = 0$]

65. Napisati jednačine zajedničkih tangenti krivih $x^2 + y^2 - 2x - 9 = 0$ i $y^2 = 4x$.

[**Rešenje:** $x - 3y + 9 = 0$, $x + 3y + 9 = 0$]

66. Data je prava $a: 4x - 3y + 9 = 0$.

- Napisati jednačinu parabole $y^2 = 2px$ koja dodiruje pravu a ;
- Na dobijenoj paraboli odrediti tačku P koja je najbliža pravoj $4x + y + 4 = 0$;
- Odrediti odstojanje tačke P od prave a .

[**Rešenje:** a) $y = 16x$; b) $P\left(\frac{1}{4}, -2\right)$; v) $d = \frac{16}{5}$]

67. Prava $2x + y - 12 = 0$ seče parabolu $y^2 = 4x$. Odrediti:

- ugao između tangenti parabole u tačkama preseka;
- jednačinu tangente parabole koja je paralelna sa datom pravom;
- jednačinu kružnice opisane oko trougla čija su temena presečne tačke date prave i parabole, i presek tangenata povučenih na parabolu u tim tačkama.

[**Rešenje:** a) $\alpha = 45^\circ$; b) $4x + 2y + 1 = 0$; v) $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{125}{2}$]

III.9 MATEMATIČKA INDUKCIJA

68. Dokazati da za $\forall n \in \mathbb{N}$ važi jednakost $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

69. Dokazati da za $\forall n \in \mathbb{N}$ važi jednakost
$$\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{n^2 + 3n + 2} = \frac{n}{2n + 4}$$

70. Dokazati da je $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ deqivo sa 17 za $\forall n \in \mathbb{N}$.

71. Dokazati da je $2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$ deqivo sa 54 za $\forall n \in \mathbb{N}$.

III.10 BROJNI NIZOVI. ARITMETIČKI I GEOMETRIJSKI NIZ. BROJNI REDOVI

72. Odrediti aritmetički niz za koji je: $5a_1 + 10a_5 = 0$ i $S_4 = 14$.

[Rešenje: 8, 5, 2, -1, -4, ...]

73. Odrediti aritmetički niz za koji je: $S_2 - S_4 + a_2 = 1$ i $S_3 + a_3 = 17$.

[Rešenje: $\frac{73}{11}, \frac{52}{11}, \frac{31}{11}, \frac{10}{11}, \dots$]

74. U aritmetičkom nizu dato je: $a_2 + a_5 - a_3 = 10$ i $a_1 + a_6 = 17$. Izračunati prvi član i diferenciju.

[Rešenje: $a_1 = 1, d = 3$]

75. Rešiti jednačinu: $3 + 7 + 11 + \dots + x = 210$.

[Rešenje: $x = 39$]

76. Rešiti jednačinu: $1 + 9 + 17 + \dots + x = 370$.

[Rešenje: $x = 73$]

77. Izračunati prvi član i količnik geometrijskog niza ako je: $b_5 - b_1 = 15$ i $b_4 - b_2 = 6$

[Rešenje: -16, -8, -4, -2, ... ili 1, 2, 4, 8, ...]

78. Odrediti geometrijski niz ako je: $b_2 + b_5 - b_4 = 10$ i $b_3 + b_6 - b_5 = 20$

[Rešenje: 1, 2, 4, 8, ...]

79. Odrediti geometrijski niz ako je: $b_1 + b_2 + b_3 = 62$ i $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 = 1000$

[Rešenje: 50, 10, 2, $\frac{2}{5}$, ... ili 2, 10, 50, 250, ...]

80. Odrediti geometrijski niz ako je: $b_1 + b_5 = 1285$ i $b_2 \cdot b_4 = 6400$

[Rešenje: $b_1' = 5, q' = \pm 4; b_1'' = 1280, q'' = \pm \frac{1}{4}$]

81. Ako svaki od četiri broja, koji čine aritmetičku progresiju, uvećamo redom za 5, 6, 9 i 15 dobićemo geometrijsku progresiju. Naći te brojeve.

[Rešenje: 3, 6, 9, 12]

82. Dimenzije pravouglon paralelepipeda čine geometrijski niz. Površina osnove je 108cm^2 , a površina tela je 888cm^2 . Izračunati dimenzije tela.

[Rešenje: 9, 12, 16]

83. Odrediti aritmetički i geometrijski niz ako su im prvi članovi jednaki 1, peti članovi su međusobno jednaki, a drugi član aritmetičkog niza je za 12 veći od trećeg člana geometrijskog niza.

[Rešenje: $a_n: 1, 21, 41, \dots, 20n - 19, \dots$; $b_n': 1, 3, 9, \dots, 3^{n-1}, \dots$; $b_n'': 1, -3, 9, -27, \dots, (-3)^{n-1}, \dots$]

84. Izračunati graničnu vrednost

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \dots + \frac{2^n}{3^{n-1}}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}$$

[Rešenje: 3]

85. Naći zbir beskonačnog reda

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots$$

[Rešenje: $\frac{1}{3}$]

86. U jednakostranični trougao stranice a upisan je novi jednakostranični trougao čija su temena središta stranica prvog trougla. U ovaj trougao upisan je novi na isti način, i tako redom u beskonačnost. Naći zbir obima i zbir površina ovih trouglova.

[Rešenje: $S_0 = 6a$; $S_P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{3}$]

IV RAZRED

IV.1 GRANIČNA VREDNOST FUNKCIJE

1. Izračunati graničnu vrednost

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{8\sqrt{x} - x^2}{8 - 4\sqrt{x}}$$

[Rešenje: 6]

2. Izračunati graničnu vrednost

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{4(2 - \sqrt{x-3})}{x^2 - 49}$$

[Rešenje: $-\frac{1}{14}$]

3. Izračunati graničnu vrednost

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{4x}$$

[Rešenje: $\frac{1}{4}$]

4. Izračunati graničnu vrednost $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}$ [Rešenje: 4]

5. Izračunati graničnu vrednost $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1 - \operatorname{tg} 2x} - \sqrt{1 + \operatorname{tg} 2x})}{1 - \cos x}$ [Rešenje: -4]

6. Izračunati graničnu vrednost $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3} \right)^{3x-2}$ [Rešenje: e^{-6}]

7. Izračunati graničnu vrednost $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x \sin^2 x}$ [Rešenje: $\frac{1}{2}$]

8. Izračunati graničnu vrednost $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{x}$ [Rešenje: 1]

9. Izračunati graničnu vrednost $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}$ [Rešenje: -1]

10. Izračunati graničnu vrednost $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x - 1}{\ln(1+x)}$ [Rešenje: 2]

11. Izračunati graničnu vrednost $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x}{3x^2 + x^5}$ [Rešenje: $\frac{1}{3}$]

IV.2 IZVODI FUNKCIJA

12. Naći prvi izvod funkcije $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ [Rešenje: $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$]

13. Naći prvi izvod funkcije $y = \ln \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$ [Rešenje: $y' = \frac{1}{\sin x}$]

14. Naći prvi izvod funkcije $y = \operatorname{arcc} \operatorname{tg} \frac{1+x}{1-x}$

$$[\text{Rešenje: } y' = -\frac{1}{1+x^2}]$$

15. Naći prvi izvod funkcije $y = \text{arcctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$[\text{Rešenje: } y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}]$$

16. Naći prvi izvod funkcije $y = \text{arcctg} \frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}$

$$[\text{Rešenje: } y' = \frac{1}{\sqrt{ax-x^2}}, (0 < x < a)]$$

17. Naći prvi izvod funkcije $y = e^x \sqrt{1-e^{2x}} + \arcsin e^x$

$$[\text{Rešenje: } y' = 2e^x \sqrt{1-e^{2x}}]$$

18. Naći prvi izvod funkcije $y = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2} \text{arctg} x$

$$[\text{Rešenje: } y' = \frac{x^2}{1-x^4}]$$

19. Naći prvi izvod funkcije $y = x \text{arctg} \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln(x^2 + a^2)$

$$[\text{Rešenje: } y' = \text{arctg} \frac{x}{a}]$$

20. Naći prvi izvod funkcije $y = \sqrt{4x-1} - \text{arctg} \sqrt{4x-1}$

$$[\text{Rešenje: } y' = \frac{\sqrt{4x-1}}{2x}]$$

IV.3 ISPITIVANJE FUNKCIJA

21. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $y = \frac{x^2 - 4x}{(x-1)(x-3)}$

22. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $y = \frac{4x}{4-x^2}$

23. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$

24. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $y = \frac{3x - x^2}{x-4}$

25. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $y = \frac{4x - x^2 - 4}{x-1}$

26. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $y = \frac{x^3}{3 - x^2}$
27. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $y = \frac{x^2 + 3x}{x + 4}$
28. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $y = \frac{\sqrt{3 + x^2}}{x - 1}$
29. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $y = \frac{2 - \ln x}{x}$
30. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $y = x \ln x$
31. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $y = x \ln^2 x$
32. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $y = (1 + x^2) \cdot e^{-x^2}$
33. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $y = x \cdot e^x$
34. Ispitati tok i skicirati grafik funkcije $y = \frac{e^x}{x}$

IV.4 NEODREVENI INTEGRALI

35. Izračunati integral $\int \frac{(x-4)dx}{\sqrt{6x-x^2}}$ [Rešenje: $-\sqrt{6x-x^2} - \arcsin \frac{x-3}{3} + C$]
36. Izračunati integral $\int \frac{\operatorname{arctg} x dx}{x^2(1+x^2)}$ [Rešenje: $-\frac{\operatorname{arctg} x}{x} - \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + \ln \left| \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right| + C$]
37. Izračunati integral $\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}$ [Rešenje: $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2(x+1)} + C$]
38. Izračunati integrale $J_1 = \int \sin(\ln x) dx$ i $J_2 = \int \cos(\ln x) dx$ [Rešenje: $J_1 = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$; $J_2 = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C$]
39. Izračunati integral $\int \frac{\arccos x - x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$\left[\text{Rešenje: } -\frac{1}{2}(\arccos x)^2 + \sqrt{1-x^2} + C \right]$$

40. Izračunati integral $\int \frac{x - \arctg x}{1+x^2} dx$

$$\left[\text{Rešenje: } \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2}(\arctg x)^2 + C \right]$$

41. Izračunati integral $\int \frac{\sin 2x}{\text{ctg}^4 x} dx$

$$\left[\text{Rešenje: } \ln \cos^4 x + \frac{1}{\cos^2 x} - \cos^2 x + C \right]$$

42. Izračunati integral $\int \sin 2x \cdot \text{ctg}^4 x dx$

$$\left[\text{Rešenje: } \sin^2 x - \ln \sin^4 x - \frac{1}{\sin^2 x} + C \right]$$

43. Izračunati integral $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$

$$\left[\text{Rešenje: } -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C \right]$$

44. Izračunati integral $\int \ln^2 x dx$

$$\left[\text{Rešenje: } x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2) + C \right]$$

45. Izračunati integral $\int e^x \sin x dx$

$$\left[\text{Rešenje: } \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C \right]$$

46. Izračunati integral $\int e^x \cos x dx$

$$\left[\text{Rešenje: } \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{2} + C \right]$$

47. Izračunati integral $\int x \cdot \ln(x^2 - 1) dx$

$$\left[\text{Rešenje: } \frac{1}{2}(x^2 - 1) \ln(x^2 - 1) - \frac{1}{2}x^2 + C \right]$$

48. Izračunati integral $\int x^2 \cdot \ln \frac{1-x}{1+x} dx$

$$\left[\text{Rešenje: } \frac{x^3}{3} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| - \frac{1}{3} \ln |1-x^2| - \frac{1}{3}x^2 + C \right]$$

49. Izračunati integral $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x + 4 \cos x + 1}} dx$

$$\left[\text{Rešenje: } -\ln \left| \cos x + 2 + \sqrt{\cos^2 x + 4 \cos x + 1} \right| + C \right]$$

50. Izračunati integral $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4 \ln x - \ln^2 x}}$

$$\left[\text{Rešenje: } \arcsin \frac{2 + \ln x}{\sqrt{5}} + C \right]$$

51. Izračunati integral

$$\int \frac{9x^2 - 2x - 8}{x^3 - 4x} dx$$

[Rešenje: $2 \ln|x| + 3 \ln|x-2| + 4 \ln|x+2| + C$]

IV.5 ODREVENI INTEGRALI

52. Izračunati površinu površi ograničene linijama $y^2 = 2x + 1$ i $y = x - 1$.

[Rešenje: $P = \frac{16}{3}$]

53. Izračunati površinu dela ravni ograničenog pravom $y = x$ i parabolom $y = 2 - x^2$.

[Rešenje: $P = 4,5$]

54. Izračunati površinu dela ravni koji ograničavaju parabole $7x^2 - 9y + 9 = 0$ i $5x^2 - 9y + 27 = 0$.

[Rešenje: $P = 8$]

55. Izračunati površinu površi ograničene linijama $x^2 + y^2 = 4$ i $y^2 = 3x$ ($0 \leq x \leq 2$).

[Rešenje: $P = \frac{4\pi + \sqrt{3}}{3}$]

56. Izračunati dužinu luka krive $y = \frac{\sqrt{x}}{3}(x-3)$, $x \in [0, 3]$.

[Rešenje: $l = 2\sqrt{3}$]

57. Izračunati zapreminu tela određenog rotacijom luka $y = \sin^2 x$, $x \in [0, \pi]$ oko ose Ox .

[Rešenje: $V = \frac{3\pi^2}{8}$]

58. Izračunati zapreminu tela određenog rotacijom luka krive $y = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in [0, 1]$ oko Ox ose.

[Rešenje: $V = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{4}$]

IV.6 KOMBINATORIKA

59. (a) Iz grupe od 7 muškaraca i 4 žene treba odabrati 6 osoba tako da među njima budu bar 2 žene. Na koliko načina se to može učiniti?

(b) Rešiti jednačinu $V_4^x : V_5^{x-1} = 1 : 3$

[Rešenje: (a) 371; (b) $x = 10$]

60. (a) Koliko ima različitih četvorocifrenih brojeva deqivih sa 5, zapisanih pomoću cifara 0, 1, 2, 3, 4, 5 ako se cifre ne ponavqaju, a koliko ako se cifre ponavqaju.

(b) Rešiti jednačinu $C_{x-4}^{x+1} = \frac{7}{15} V_3^{x+1}$

[Rešenje: (a) 108, 360; (b) $x = 10$]

61. (a) Odrediti broj prirodnih brojeva, većih od 10 000 koji se mogu formirati od cifara 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, tako da im cifre budu različite.

(b) Rešiti nejednačinu $\frac{(3x-1)!}{(3x+1)!} \geq \frac{1}{90}$, $x \in \mathbb{N}$.

[Rešenje: (a) 10 800; (b) $x \in \{1, 2, 3\}$]

62. Dat je skup $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Odrediti sve različite prirodne brojeve veće od 1 000, koji se mogu formirati od elemenata skupa E , tako da cifre budu različite.

[Rešenje: 1 500]

63. Odrediti broj različitih prirodnih brojeva, manjih od 100 000 koji se mogu formirati od cifara 0, 1, 2, 3, 4, 5.

[Rešenje: 7 775]

64. Dat je skup $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

(a) koliko se različitih petocifrenih prirodnih brojeva može formirati od elemenata skupa S , tako da se u njima cifre ne ponavljaju;

(b) koliko ima parnih brojeva određenih u zadatku pod (a)?

[Rešenje: (a) 96; (b) 60]

65. Dat je skup $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

(a) odrediti broj različitih šestocifrenih prirodnih brojeva može formirati od elemenata skupa S ;

(b) odrediti broj parnih prirodnih brojeva određenih u zadatku pod (a)?

[Rešenje: (a) 600; (b) 312]

66. Koliko ima sedmocifrenih brojeva obrazovanih od cifara 0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, ne uzimajući u obzir, razume se, one koji počinju nulom (ili nulama)?

[Rešenje: 90]

IV.7 BINOMNA FORMULA

67. Za koju vrednost x u razvijenom obliku binoma $\left(\sqrt{2^x} + \frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^n$ je zbir trećeg i petog člana 135,

ako je zbir binomnih koeficijenata poslednja tri člana 22.

[Rešenje: $n = 6$, $x = -1 \vee x = 2$]

68. Odrediti za koje je x šesti član razvoja binoma $\left(\sqrt{2^{\log(10-3^x)}} + \sqrt[5]{2^{(x-2)\log 3}}\right)^n$ jednak 21, ako su

binomni koeficijenti drugog, trećeg i četvrtog člana razvoja redom prvi, treći i peti član aritmetičke progresije.

[Rešenje: $n = 7, x = 0 \vee x = 2$]

69. U razlaganju binoma $\left(a^2\sqrt[3]{a} - \frac{2}{a^3\sqrt{a}} \right)^n$ naći član koji ne sadrži a , ako je odnos binomnih koeficijenata petog i trećeg člana $1 : 2$.

[Rešenje: $B_3 = 40$]

70. Zbir binomnih koeficijenata drugog i trećeg člana u razvoju binoma $\left(\sqrt[5]{x^2} - \frac{1}{2\sqrt[6]{x}} \right)^n$ jednak je 153.

Naći član koji ne sadrži x .

[Rešenje: $n = 17, k = 12, B_{13} = 17 \cdot 91 \cdot 2^{-10}$]